**Étude asymptotique d'une marche aléatoire**

**Objectif**

Prévoir l'éventuelle convergence des états probabilistes d'une marche aléatoire.

Soit *N* un entier naturel non nul. Soit *Pn* la matrice colonne à *N* lignes décrivant l'état probabiliste à l'étape *n* d'une marche aléatoire sur un graphe probabiliste à *N* sommets.  
La somme des coefficients de *Pn* vaut toujours 1.  
On notera par *A* la matrice de transition du graphe associé à cette marche aléatoire.

[Cours particuliers de Mathématiques niveau Lycée](https://www.livementor.com/cours-particuliers/Lycee/Mathematiques?widget=nov15&utm_source=http://www.cours.fr/)

**1. Suite de matrices (Pn)**

La suite (*Pn*) est définie par ***P*0** et ***Pn*+1 = *A* × *Pn***.

***Remarque :*** La matrice *A* est la matrice de transition du graphe associé à la marche aléatoire.

Cette marche aléatoire admet un **état stable *S*** avec ***S*** **=** ***AS***.

***Remarque :*** L'état stable ne dépend pas de l'état initial *P*0.

**2. Étude de la convergence de (Pn)**

a. Notion de convergence

Une suite de matrices colonnes (*Pn*) qui **converge vers la matrice colonne** ***L*** signifie que **chaque coefficient** de la matrice ***Pn*** **converge** vers le **coefficient de *L* qui lui correspond**.

***Exemple :*** http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460068/img/4/6/5/0/465004.gif converge vers http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460068/img/4/6/5/0/465006.gif.

b. Théorème admis

Si la matrice de transition d'une marche aléatoire admet une puissance dont tous les coefficient sont strictement positifs, alors **(*Pn*) converge vers un état stable unique** ***S***.

**Méthode :**  
Pour trouver l'état stable, il faut résoudre un système en n'oubliant pas que la somme des coefficients de l'état stable vaut 1.  
  
***Exemple :***  
Déterminons l'état stable de la matrice de transition A = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460068/img/4/6/5/0/465012.gif.  
Posons S = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460068/img/4/6/5/0/465014.gif. On a alors : http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460068/img/4/6/5/0/465016.gif  
La probabilité de revenir au bout d'un certain temps à l'état initial vaut donc http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460068/img/4/6/5/1/465115.gif.

**L'essentiel**

La suite (*Pn*), représentant la matrice colonne qui décrit l'état probabiliste d'une marche aléatoire, est définie par ***P*0** et ***Pn*+1 = *A* × *Pn***.  
Cette marche aléatoire admet un **état stable** ***S*** avec ***S*** **=** ***AS***.